Modul Geometrie 15. Dezember 2008

Wintersemester 2008-2009

Schmale

Aufgaben

(24) (4P) **Halbiert die Winkelhalbierende den Winkel?** In der Vorlesung wurde die Grade (hier im Spezialfall $c = 0$)

$$W = \mathbb{R}\left(\frac{a}{\| a \|} + \frac{b}{\| b \|}\right)$$

als Winkelhalbierende des Winkels γ bei 0 im nicht ausgearteten Dreieck $a, b, 0$ bezeichnet. Es soll nun nachgewiesen werden, dass $2 \cdot \measuredangle(a, \frac{a}{\| a \|} + \frac{b}{\| b \|}) = \measuredangle(a, b) = 2 \cdot \measuredangle(\frac{a}{\| a \|} + \frac{b}{\| b \|}, a)$. Zeigen Sie dazu:

(a) Mit $a' = \frac{a}{\| a \|}, b' = \frac{b}{\| b \|}$ gilt

$$\frac{(\!(a', a' + b')\!)}{\| a' + b' \|} = {}_{+}\sqrt{\frac{1 + (\!(a', b')\!)}{2}} .$$

(b) Benutzen Sie die Relation $\cos(\frac{\gamma}{2}) = {}_{+}\sqrt{\frac{1 + \cos(\gamma)}{2}}$ für $\gamma \in [0, \pi]$, um die Winkelhalbierung zu bestätigen.

(c) Zeigen Sie außerdem: Seien p_a, p_b die jeweils orthogonalen Projektionen eines Punktes y aus W auf $0 \vee a, 0 \vee b$, dann gilt $\| p_a \| = \| p_b \|$.

(25) (6P) **Zur Berechenbarkeit einiger geometrischer Größen innerhalb eines vorgegebenen Zahlbereichs.** Sei K ein Unterkörper des Körpers der reellen Zahlen. Wir denken dabei in erster Linien an den Fall $K = \mathbb{Q}$. Ein Punkt $p \in K^n$ soll K-rational heißen. Zeigen Sie:

(a) Die Punkte $a^{(0)}, \ldots, a^{(r)} \in K^n$ sind genau dann affin unabhängig in K^n, wenn sie dies in $\mathbb{R}^n$ sind.

(b) Seien $a, b, c \in K^2$ affin unabhängig. Die Punkte z, m, h, f sind alle K-rational.

(26) **Zusatzaufgabe.** In der Vorlesung wurde auf die Möglichkeit hingewiesen, Phänomene der ebenen reellen euklidischen Geometrie mit Hilfe komplexer Zahlen zu erfassen. Mit dieser Aufgabe können erste Schritte in dieser Richtung getan werden. Ein Punkt a ist nach Bedarf ein Vektor in $\mathbb{R}^2$, dann also $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, oder eine komplexe Zahl $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$. Wenn z.B. von Geraden als Teilmengen von $\mathbb{C}$ die Rede ist, dann ist stets gemeint, dass die zu Grunde liegende Punktmenge in $\mathbb{R}^2$ eine Gerade ist im Sinne unserer euklidischen Geometrie. Entsprechend sind auch andere geometrische Begriffe und Konstruktionen wie etwa „$\vee$“ zu interpretieren.

(a) Ist zu $a, u \in \mathbb{C}, u \neq 0$, die Menge $a + \mathbb{C}u$ eine Gerade ?

(b) Zeigen Sie: Zu zwei verschiedenen komplexen Zahlen a, b ist

$$a \vee b = \{\, z \in C : \ (b - a)(\overline{z - a}) = (\overline{b - a})(z - a) \,\}^{(12)} .$$

(c) Die komplexen Zahlen a, b seien $\mathbb{R}$-linear unabhängig. Zeigen Sie:
Wenn $(a + b)^2 = 3ab$, dann ist das Dreieck mit den Ecken $0, a, b$ gleichseitig.

....

(12) Dabei bedeutet „$\overline{}$“ wie üblich die komplexe Konjugation.